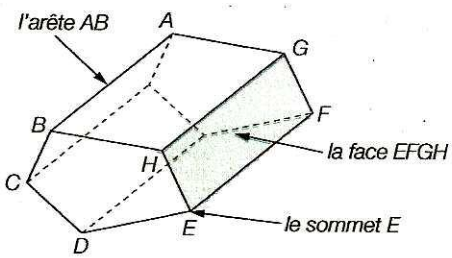
Géométrie

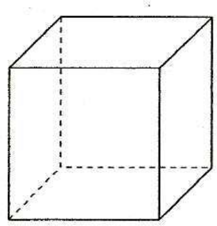
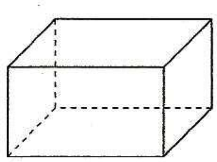
Polyèdres, constructions et mesures

§ 1. Polyèdres

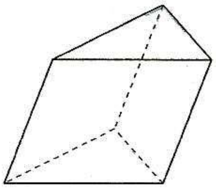
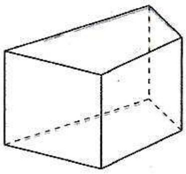
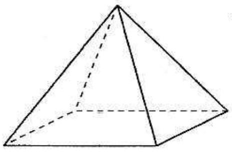
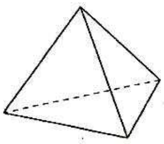
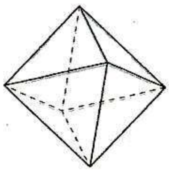
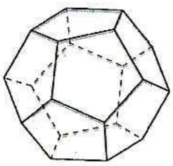
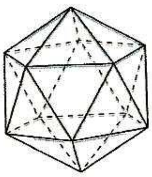
Un **polyèdre** est un solide de l'espace dont toutes les faces sont des polygones:



En voici quelques exemples avec leurs caractéristiques:

Nom	Figure	Définition	Remarque
Cube		Polyèdre dont les 6 faces sont des carrés.	Le cube est un parallélépipède rectangle particulier. Le cube est un prisme droit particulier.
Parallélépipède rectangle ou pavé droit		Polyèdre dont les 6 faces sont des rectangles.	Le parallélépipède rectangle est un prisme droit particulier.

(suite page suivante)

Nom	Figure	Définition	Remarque
Prisme		Polyèdre dont les deux bases sont des polygones isométriques et parallèles et dont les faces latérales sont des parallélogrammes.	
Prisme droit		Prisme dont les faces latérales sont des rectangles.	
Pyramide		Polyèdre dont la base est un polygone et dont les faces latérales sont des triangles.	Une pyramide est régulière si sa base est un polygone régulier et si ses faces sont des triangles isocèles.
Tétraèdre régulier		Polyèdre dont les 4 faces sont des triangles équilatéraux. C'est une pyramide particulière.	
Octaèdre régulier		Polyèdre dont les 8 faces sont des triangles équilatéraux.	Un polyèdre est régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers et si chacun de ses sommets est l'intersection d'un même nombre d'arêtes. Le cube et les quatre polyèdres ci-contre sont les seuls polyèdres réguliers convexes.
Dodécaèdre régulier		Polyèdre dont les 12 faces sont des pentagones réguliers.	
Icosaèdre régulier		Polyèdre dont les 20 faces sont des triangles équilatéraux.	

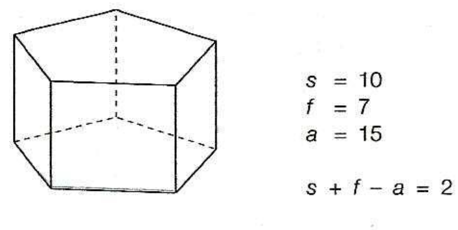
§ 2. Relation d'Euler pour les polyèdres

Le mathématicien suisse Leonhard Euler a découvert une relation entre le nombre de sommets, le nombre de faces et le nombre d'arêtes de tous les polyèdres convexes:

Tout polyèdre convexe possédant *s* sommets, *f* faces et *a* arêtes vérifie la relation

$$s + f - a = 2.$$

Exemple:

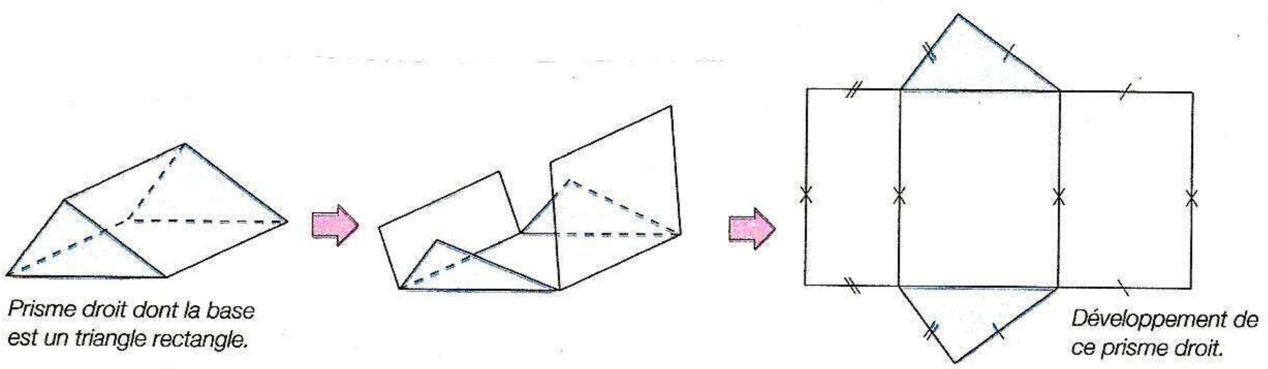


Prisme dont la base est un pentagone.

Ainsi, si l'on connaît le nombre de sommets et de faces d'un polyèdre (ils sont généralement faciles à compter sur l'objet), on peut en déduire facilement le nombre d'arêtes (ce qui est plus difficile à compter) en effectuant nb de sommets + nb de faces - 2.

§ 3. Constructions de polyèdres

Lorsqu'on veut construire un polyèdre en trois dimensions, il nous faut passer par la construction de son développement. Un **développement d'un polyèdre** est le polyèdre déplié et mis à plat.



Prisme droit dont la base est un triangle rectangle.

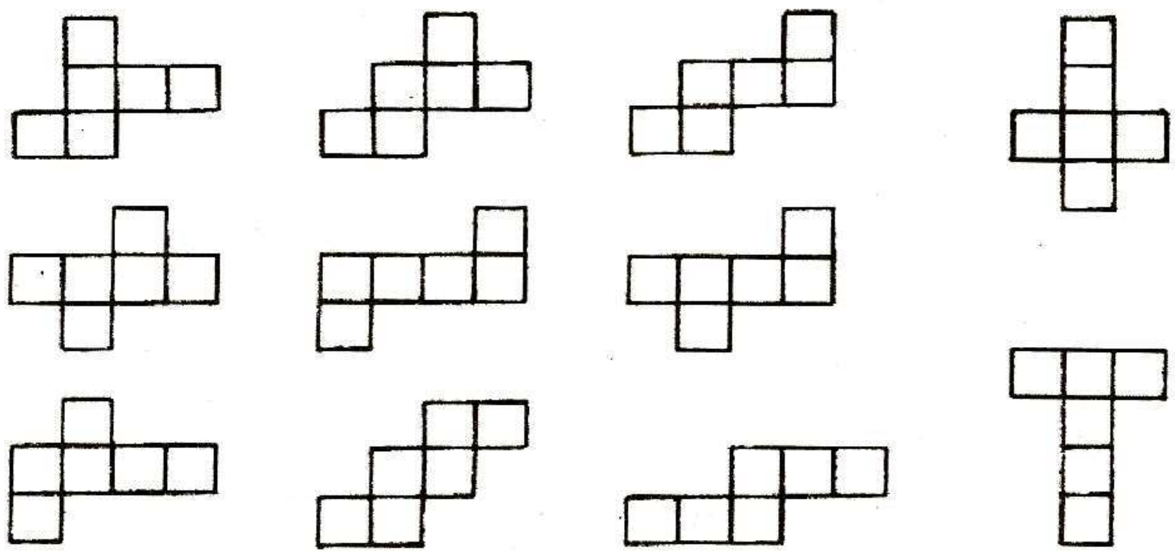
Développement de ce prisme droit.

Il existe toujours plusieurs développements possibles pour un polyèdre.

Un développement ne donne pas une véritable vue d'un objet, mais il permet de le construire.

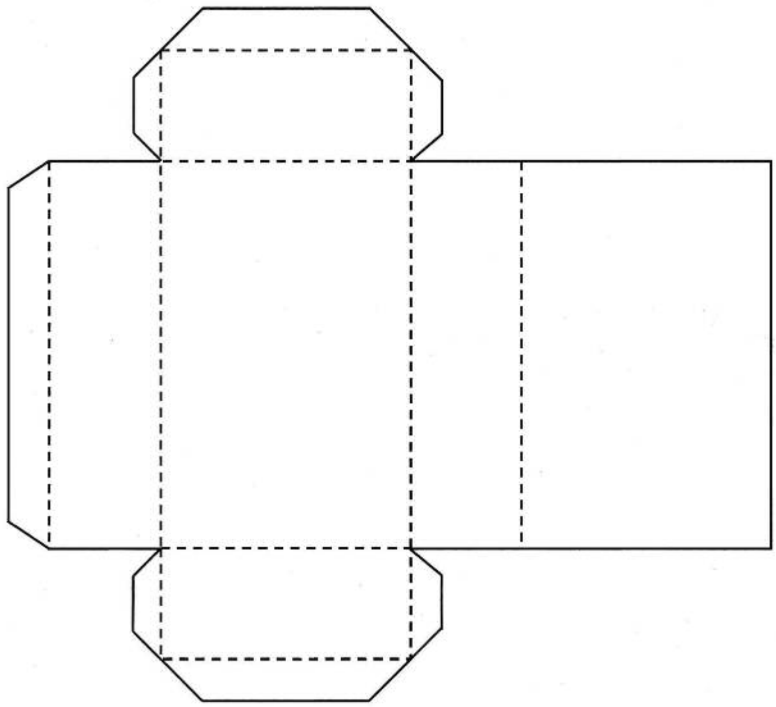
Développements d'un cube:

Voici les différents développements possibles d'un cube:



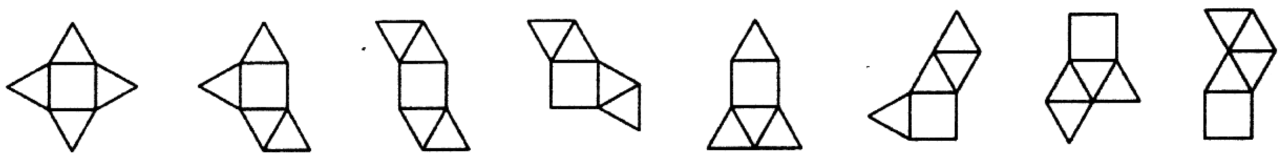
Développements d'un parallélipipède rectangle:

Voici un développement possible (avec onglets) d'un parallélipipède rectangle:

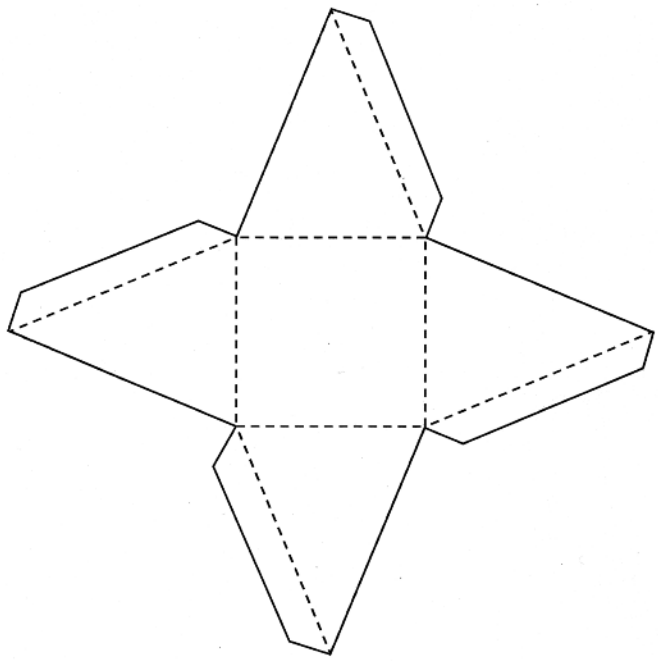


Développements d'une pyramide:

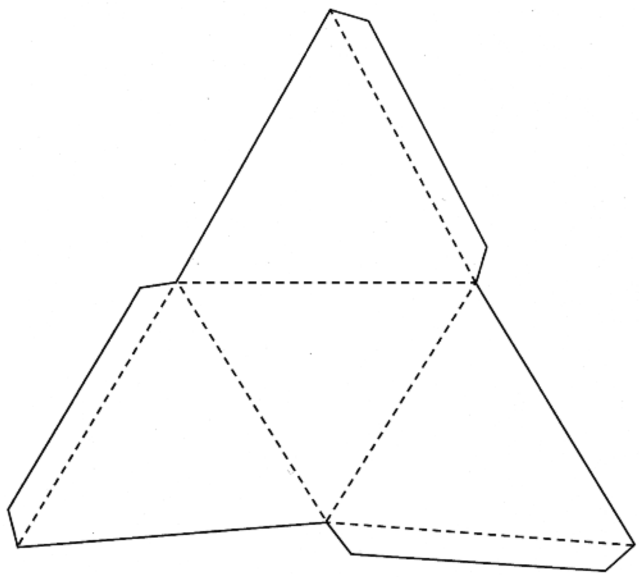
Voici les 8 développements possibles d'une pyramide à base carrée:



Voici un développement avec onglets d'une pyramide à base carrée:

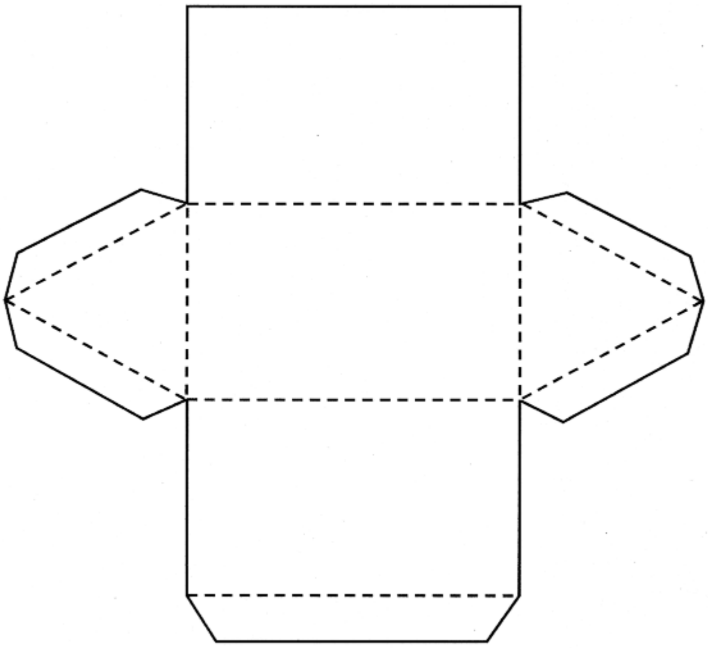


Voici un développement avec onglets d'un tétraèdre (pyramide à base triangulaire):

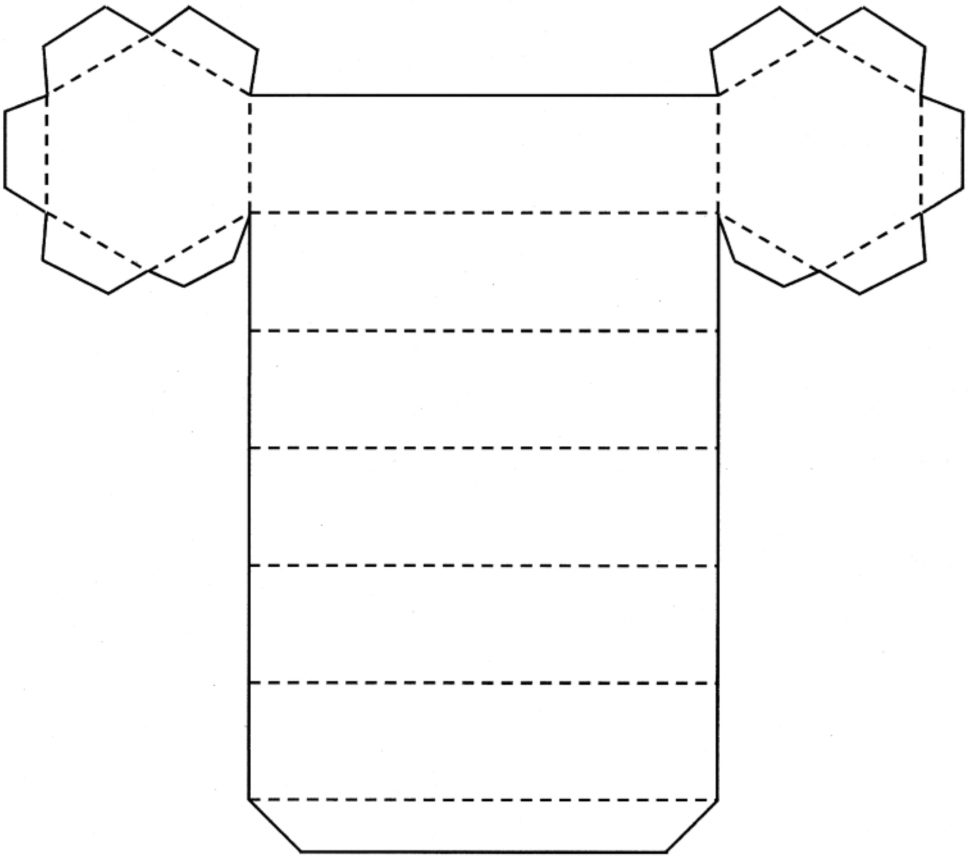


Développements d'un prisme droit:

Voici un développement avec onglets d'un prisme droit à base triangulaire:

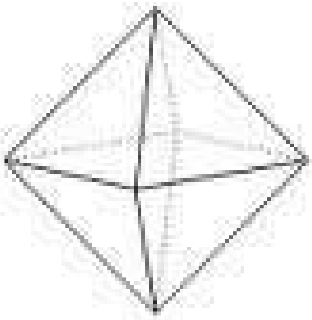


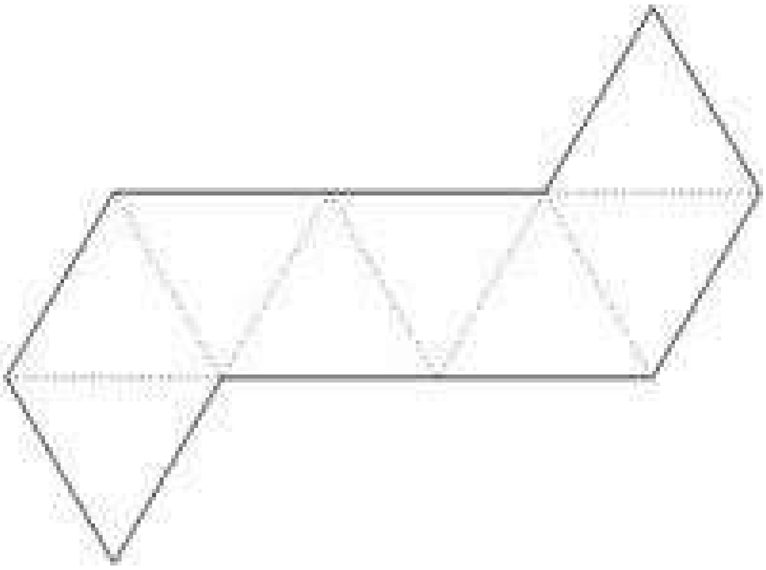
Voici un développement avec onglets d'un prisme droit à base hexagonale:



Développements d'un octaèdre:

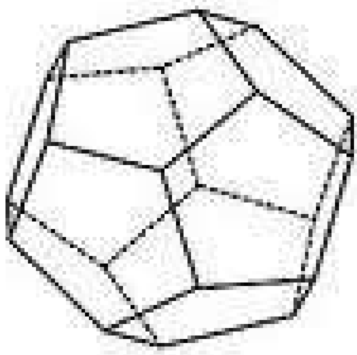
Voici un développement possible d'un octaèdre:



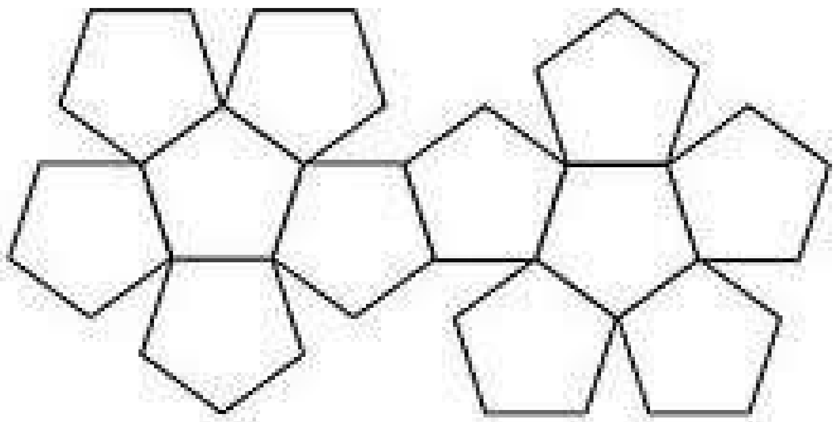


Développements d'un dodécaèdre:

Voici un développement possible d'un dodécaèdre:



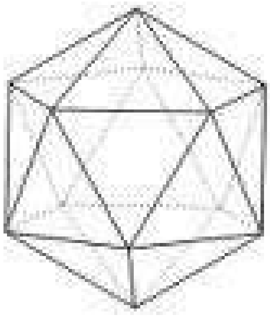
un dodécaèdre
en perspective

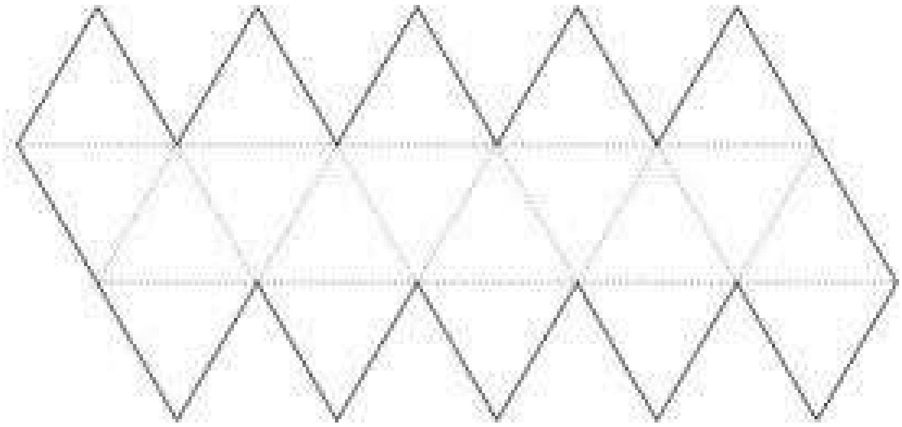


un développement
d'un dodécaèdre

Développements d'un icosaèdre:

Voici un développement possible d'un icosaèdre:



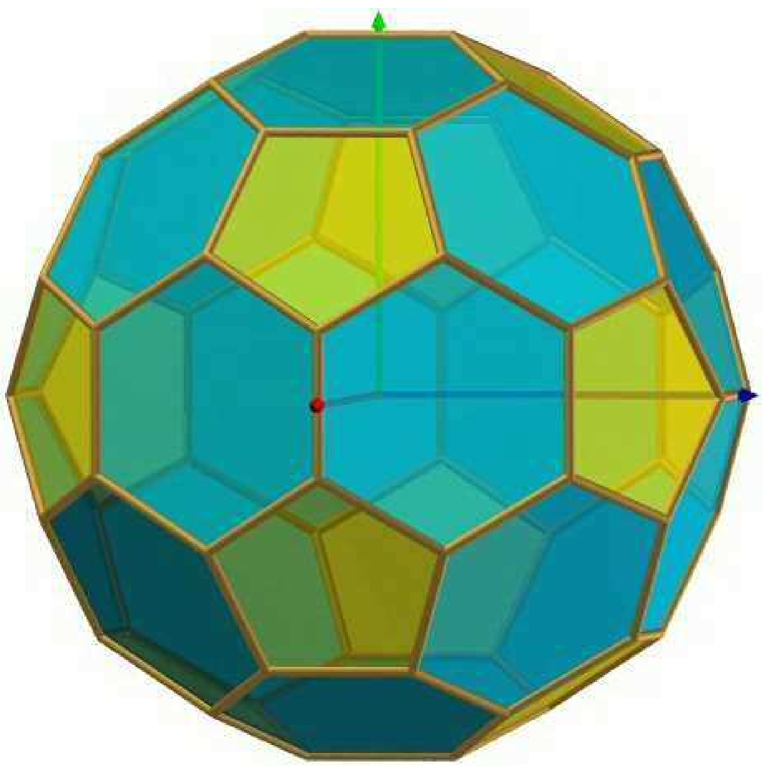


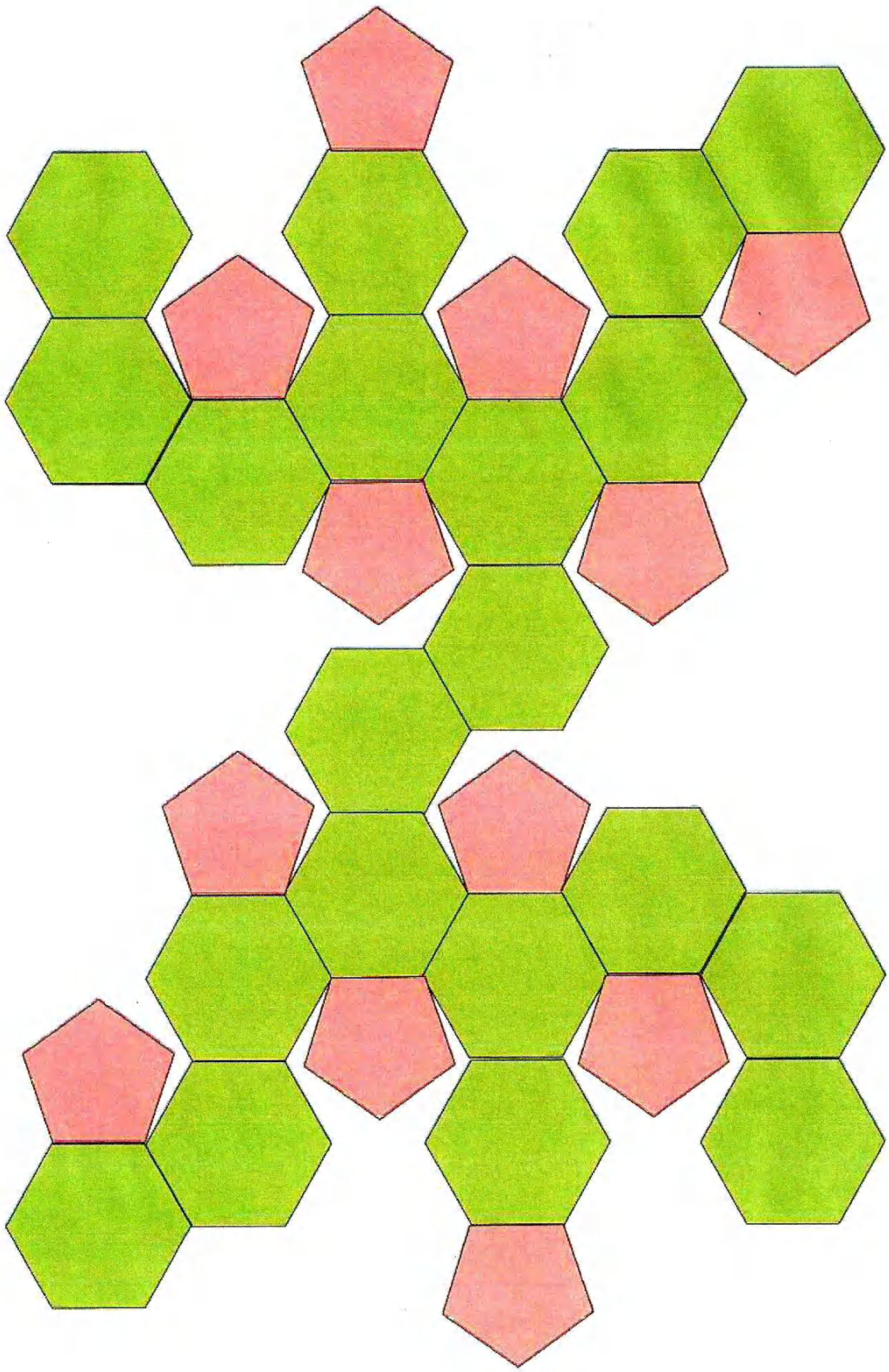
Développements de polyèdres:

Tous les polyèdres possèdent des développements.

Par contre, si vous dessinez ce que vous pensez être un développement d'un polyèdre, vous ne saurez s'il est correct que si vous arrivez à le construire complètement dans l'espace.

Voici un polyèdre (polyèdre formé de 20 hexagones réguliers et de 12 pentagones réguliers) et un de ses développements:





§ 4. Mesures de polyèdres

Contrairement aux figures à deux dimensions pour lesquelles on ne calcule que le périmètre et l'aire, on peut calculer trois choses pour les polyèdres:

- la **longueur totale des arêtes**, qui est l'addition de la longueur de toutes les arêtes (nécessaire lorsque l'on veut, par exemple, construire une armature métallique d'un polyèdre et que l'on veut savoir de quelle longueur de barreau métallique on a besoin);
- l'**aire totale**, qui est l'addition de l'aire de chaque face (nécessaire lorsque l'on veut, par exemple, savoir de quelle quantité de peinture on a besoin pour recouvrir entièrement un polyèdre);
- le **volume**, qui correspond à la quantité de liquide (par exemple) que l'on peut mettre à l'intérieur du polyèdre.

Pour les polyèdres simples, il existe des formules pour calculer ces éléments:

Mesures de cubes:

$A = 6 \cdot a \cdot a = 6a^2$

$V = a \cdot a \cdot a = a^3$

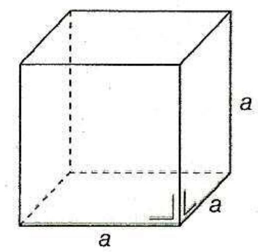
a: *mesure de l'arête*

Exemple

Si $a = 5$

$A = 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = 150$

$V = 5^3 = 125$



Mesures de parallélipipèdes rectangles:

$$A = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$
$$= 2 \cdot (ab + ac + bc)$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

a, b et c *sont les mesures des arêtes*

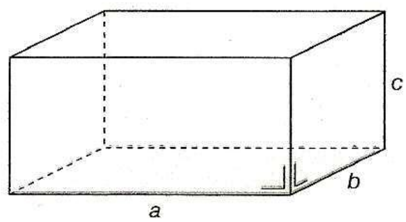
Exemple

Si $a = 10$, $b = 3$, $c = 5$

$A = 2 \cdot (30 + 50 + 15)$

$A = 2 \cdot 95 = 190$

$V = 10 \cdot 3 \cdot 5 = 150$

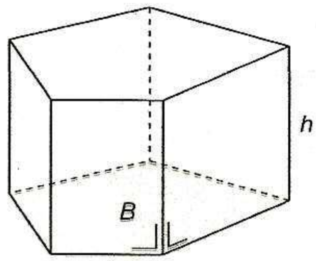


Mesures de prismes droits:

$$V = B \cdot h$$

B: aire de la base
h: mesure de la hauteur

Exemple
Si $B = 50$ et $h = 2{,}5$
$V = 50 \cdot 2{,}5 = 125$

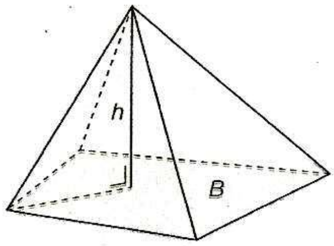


Mesures de pyramides:

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

B: aire de la base
h: mesure de la hauteur

Exemple
Si $B = 80$ et $h = 9$
$V = \frac{80 \cdot 9}{3} = 240$



Mesures d'autres polyèdres:

Lorsqu'on cherche à calculer le volume d'un polyèdre qui n'est pas un polyèdre simple (cube, parallélipipède rectangle, prisme droit, pyramide), on peut essayer de le décomposer en une somme de ces polyèdres simples, calculer le volume de chacun de ces parties, puis additionner les volumes obtenus pour obtenir le volume total du polyèdre de départ.